# 法と統計学　第 3 回
# 確率の積の法則と和の法則 (2)

森　大輔

熊本大学法学部

2017 年

# 本日の流れ

1. 確率の積の法則の適用例
2. 確率の和の法則
3. 確率の和と積の法則の複合的な適用
   - 反復試行の確率

# 適用例 3：コリンズ事件

- 確率の積の法則の誤用に関する有名な例として People v. Collins (1968)
  - 以下、コリンズ事件と呼ぶことにする
  - カリフォルニア州裁判所の刑事事件
  - 検察が被告人の有罪を立証するために、大学の数学の講師を証人とした
- 1964 年、買い物を終えたブルックス夫人が、キャスター付きバッグを引きずりながら家に帰ろうとしていた
  - バッグの上に 40 ドル程度の現金の入った財布を置いていた
- 夫人は背後から何者かに突き飛ばされた
- 立ち上がると、その場から走り去ってゆく金髪の若い女性の後ろ姿を目撃した

# 適用例 3：コリンズ事件

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lincoln_Continental_Town_Car.jpg
より

- ほぼ同時刻に、付近に住むバス氏が、道路で人が叫んでいるのに気づいた
- 叫び声のする辺りから走ってきた女性が、路上に駐車した黄色の車の助手席に飛び乗った
- 口ひげとあごひげを生やした黒人男性が運転しているのが見えた
- 助手席の女性は、金髪をポニーテールにした中肉中背の白人女性だった

# 適用例 3：コリンズ事件

- 同じ日の午前中、白人女性のジャネット・コリンズは、本件事件の現場付近の住宅で家政婦の仕事
    - 迎えに来た黒人男性のマルコム・コリンズが運転する黄色の車に乗って帰っていった
    - 雇い主の記憶によれば、当日のジャネットは、金髪をポニーテールにしていた
- 後日、ジャネット・コリンズとマルコム・コリンズは容疑者として警察に取り調べを受ける
    - マルコムとジャネットは事件が起こる少し前に結婚式を上げたばかりの夫婦
        - 1960 年代は黒人と白人の夫婦は珍しかったことに注意
    - マルコムは黄色の車 (リンカーン) を所有して運転
    - マルコムは取調中は口ひげはあったが、あごひげなし
        - ただし、事件の日前後にはあごひげがあったという第三者の証言あり

# 適用例 3：コリンズ事件

- コリンズ夫妻は、本事件の被告人として起訴
- しかし、検察は立証に苦戦
  - コリンズ夫妻は犯行を否認
  - ブルックス夫人は犯人の後ろ姿しか見ていない
  - 唯一の目撃証人であるバス氏は曖昧な証言しかできなかった
- そこで、検察は、州立大学の数学の講師を証人として呼ぶ
  - 検察と数学講師の間でやり取り

# 適用例 3：コリンズ事件

- 検察
  - 自動車を所有している男女のカップルが次に述べる 6 条件を全て満たす確率はいくらと考えるべきでしょうか
    1. 車の色は黄色である
    2. 異人種間カップルである
    3. 男性はあごひげを生やした黒人である
    4. 男性は口ひげを生やしている
    5. 女性は金髪である
    6. 女性はポニーテールにしている
- 数学講師
  - 6 条件が互いに独立であれば、確率の積の法則により、各条件の確率を掛け算すれば計算できます

# 練習問題 1：コリンズ事件

検察官は、数学講師に次のように尋ねた。それでは、6 条件が以下の確率 (以下の数字に争いはないものとする) だとしたら、6 条件を全て満たす確率はいくらですか。
① 車の色は黄色である：$1/10$ ② 異人種間カップルである：$1/1000$ ③ 男性はあごひげを生やした黒人である：$1/10$ ④ 男性は口ひげを生やしている：$1/4$ ⑤ 女性は金髪である：$1/3$ ⑥ 女性はポニーテールにしている：$1/10$
　数学講師は、確率の積の法則により計算できます、と答えた。検察官は、コリンズ夫妻以外の人が犯人の 6 条件を偶然兼ね備えている可能性はほとんどないので、コリンズ夫妻が犯人である、と述べた。

(1) 6 条件を全て満たす確率を計算しなさい。
(2) 以上の議論は確率論から見てどこが問題か。

# 適用例 3：コリンズ事件

- 検察の法廷での議論
  - 陪審員の皆さん、どういう意味かおわかりですね？
    - 米国では刑事裁判も民事裁判も、一般人が判断をする
  - 本事件の犯人がコリンズ夫妻以外である確率は 1200 万分の 1 しかありません
  - つまり彼らは有罪である可能性が極めて高いと言えます
    - 前回のハウランド遺言事件と同じ仮説検定の論理
    - コリンズ夫妻は犯人でなく偶然 6 条件が一致しただけと仮定
- この議論のどこがおかしいか？
  - 1 つは独立性の問題（独立でないものが存在）
    - 例えば「あごひげを生やすことと口ひげを生やすこと」「異人種間カップルであることと女性は金髪であること」
  - 他にも問題点がある
    - 後に条件付確率のところで説明する

# 確率の和の法則

## 確率の和の法則

$A_1$ と $A_2$ が排反事象ならば、
$\mathrm{P}(A_1 \text{または} A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)$

- $\mathrm{P}(A_1)$ は、事象 $A_1$ が起こる確率
  - 例：コインを 1 回だけ投げ、表が出るという事象 $(A_1)$ が起こる確率 $\mathrm{P}(A_1) = 1/2$
- 場合の数の和の法則と似ているが、実際、場合の数の和の法則を使って導かれている
  - $\mathrm{P}(A_1 \text{または} A_2) = \frac{n(A_1 \text{または} A_2)}{n(U)} = \frac{n(A_1)+n(A_2)}{n(U)} = \frac{n(A_1)}{n(U)} + \frac{n(A_2)}{n(U)} = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)$

# 確率の和の法則

- 例 1：コインを 1 回投げ、表が出るという事象 ($A_1$) と、裏が出るという事象 ($A_2$) のどちらか一方が起こる確率 $\mathrm{P}(A_1$または $A_2)$
  - 表が出る確率 $\mathrm{P}(A_1) = 1/2$、裏が出る確率 $\mathrm{P}(A_2) = 1/2$
  - $A_1$ と $A_2$ は排反事象なので、確率の和の法則から、$\mathrm{P}(A_1$または $A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = 1/2 + 1/2 = 1$
- 例 2：陪審員候補者から、陪審員となる人を無作為に選ぶ。候補者名簿は、20%が黒人、10%がラテン系米国人、70%が白人である。最初に選ばれる人が、黒人またはラテン系米国人である確率
  - 最初に黒人が選ばれることと、最初にラテン系米国人が選ばれることは排反事象
  - よって確率の和の法則から、$0.2 + 0.1 = 0.3$

# 練習問題 2：センター試験の改革の是非

センター試験について、以下のような改革が提案されている。①資格試験化：合格させる定員を定めず、一定の点数以上を取った受験生を合格とする、② 複数回受験：難度が同程度の試験を複数回受験できるようにする。

　今、センター試験を一年間に 2 回実施する制度になったとする。一定の点数以上取れれば合格とし、合格した時点でそれ以降はセンター試験を受けないものとする。A さんは、センター試験を 1 回受けると、$p$ の確率で一定の点数以上が取れる。なお、1 回目と 2 回目の試験は、独立であるとする。

(1) 2 回実施する場合の A さんの合格の確率はいくつか。
(2) 2 回実施する場合の A さんの合格の確率は、1 回しか実施しない場合の何倍か。

# 例題 1：反復試行の確率

歪みのないコインを 4 回投げるとき、表がちょうど 2 回出る確率を求めてください。

# 例題 1：反復試行の確率

- 2 通りの考え方

1. 場合の数から最初に考える
    - 4 回中表がちょうど 2 回出る場合
        - A, B, C, D の 4 人がいて 2 人を委員に選ぶというのと同じ
        - 4 人から 2 人を選ぶ組合せ
        - ${}_4C_2$ 通り
    - 4 回コインを投げたときの出方は全部で $2^4$ 通り
    - よって、確率は $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2^4} = 3/8$

# 例題 1：反復試行の確率

2. 確率から最初に考える
   - 例えば 4 回投げて 1 回目と 2 回目に表が出る確率
     - 表表裏裏と出るということ
     - 1 回目、2 回目に表になる確率、3 回目、4 回目に裏になる確率はどれも 1/2
     - これら 4 つは独立
     - 確率の積の法則から $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (= \frac{1}{2})^4$
   - 4 回投げてどこか 2 回で表が出る
     - A, B, C, D の 4 人から誰か 2 人を委員に選ぶのと同じ
     - 4 人から 2 人を選ぶ組合せなので、${}_4\mathrm{C}_2$ 通り
   - よって答えは、確率の和の法則から ${}_4\mathrm{C}_2 \times (\frac{1}{2})^4 = 3/8$
     - 4 回コインを投げて、1 回目 2 回目に表（表表裏裏）、1 回目 3 回目に表（表裏表裏）、1 回目 4 回目に表（表裏裏表）などはすべて排反
     - 本来なら 6 個の $(\frac{1}{2})^4$ を足す（和の法則）ことになるが、式を簡単にするため $6 \times (\frac{1}{2})^4$ としている

# 反復試行の確率

1 回の試行で事象 A が起こる確率が $p$ のとき、その試行を $n$ 回繰り返して事象 A が $r$ 回起こる確率は
${}_n\mathrm{C}_r \times p^r \times (1-p)^{n-r}$

- 公式を覚えるのではなく、意味を考えればよい (例題 1)
- 試行
  - 同じ条件下で繰り返し行うことのできる行動のこと
    - 今の例だとコインを投げること
  - 試行の結果起こる事柄のことが、事象
- 反復試行
  - 試行を何回も繰り返すこと

# 練習問題 3：反復試行の確率

正しく作られたサイコロを 6 回投げたとき、1 の目が 2 回出る確率を求めなさい。

# 反復試行の確率の適用例：ドレフュス事件

https://en.wikipedia.org/wiki/Dreyfus_affair より

- ドレフュス事件
  - 1894 年、フランス
  - アルフレド・ドレフュス
    - フランス軍参謀本部所属
    - ユダヤ人
  - 非公開の軍法会議で有罪の判決
    - フランスの軍事機密をドイツに漏らした疑い
    - 軍事機密情報を含んだ 5 つの内部文書の内容を、パリ駐在のドイツ大使に伝える手書きメモを書いたのが、ドレフュスであったかどうかが争点

# ドレフュス事件

- ドレフュスは、悪魔島 (デビルズ島) に投獄
    - フランスの監獄島、過酷な環境
- フランスでは、ドレフュス派と反ドレフュス派が論争
    - 著名な作家のエミール・ゾラ
        - 「私は糾弾する」(J'accuse ...!) という文章を新聞に発表、ドレフュスの冤罪を訴える
- 1899 年に、世論の抗議に押されて、公開形式の再審
    - 検察が、アルフォンス・ベルティヨンを呼ぶ
        - 著名な犯罪学者
        - ベルティヨン式人体測定法を考案
        - 人体の一定の部位 (身長、座高、頭長など) の測定を行ってデータ化し、それに基づいて個人識別
        - 指紋による個人識別が広まる前は有用だった

# ドレフュス事件：ベルティヨンの証言

- ドレフュス事件再審における軍の主張
  - 手書きメモの筆跡とドレフュスの筆跡は似ていない
  - しかしそれは、ドレフュスが自分が書いたことを隠すために、似ていないようにわざと書いたからと主張
- ベルティヨンはこれを支持する証言
  - 手書きメモにある単語 13 個のうち 4 個で、最初と最後の文字で怪しい奇妙な「一致」が見られる
  - 普通に書いた場合、1 個の単語でこのような「一致」が生じる確率は 0.2 だとベルティヨンは考えた
  - 4 個の単語で一致が生じる確率は、$0.2^4 = 0.0016$
    - 確率の積の法則を使用
  - このような低い確率が出るということは、手書きメモの筆跡は普通に書かれたものではない
  - つまり、ドレフュスが筆跡を偽った

# ドレフュス事件

- ベルティヨンの議論には様々な問題点
  - 「一致」とは何なのか十分に説明されていない
    - 筆跡が同じという意味の「一致」ではなく、もっと荒唐無稽なものだった
  - なぜ「一致」があると筆跡が普通に書いたものと言えないのかも説明されていない
  - 「一致」が生じる確率が 0.2 だということに根拠がない
- 控訴裁判所の任命した、科学アカデミーの専門家チーム
  - 仮に上記の問題点がクリアできたとしても、数学的に誤っている点があることを指摘
- ドレフュスは無罪に
  - 軍に復帰し、少佐に昇格、勲章を受賞
  - 2006 年に、無罪判決 100 年記念式典

# ドレフュス事件：科学アカデミーの指摘

- ベルティヨンは、実際に「一致」の見つかった特定の 4 単語のみ見ている
  - ベルティヨンは、$0.2^4 = 0.0016$ と計算していた
- 正しくは、13 個の単語うち、どれでもいいのでどれか 4 個の単語で「一致」がある確率を計算しなければならない
  - どの 4 単語で「一致」が見つかっても、ベルティヨンは「普通に書いた筆跡でない」と判断するはずだから
  - これは反復試行の確率

# 練習問題 4：ドレフュス事件

普通に書いた場合、1 個の単語でこのような「一致」が生じる確率は 0.2 だとする。
(1) 13 個の単語うち、どれでもいいのでどれか 4 個の単語で「一致」がある確率はいくらか。
(2) 13 個の単語うち、どれでもいいのでどれか 4 個以上の単語で「一致」がある確率を求める計算式を書きなさい。

# ドレフュス事件：科学アカデミーの指摘

- 13 個の単語うち、どれでもいいのでどれか 4 個の単語で「一致」がある確率は 0.1535
- しかし、実は、正確にはもっと大きくなる
- ベルティヨンの議論は、普通に書いた筆跡では、4 個もの単語で「一致」が生じることはありえないということ
- $\to$ 5 個の単語、6 個の単語、$\cdots$、13 個の単語で「一致」が生じることはなおさらありえない
- よって、これらの確率も足し算すべき
  - 4 個の単語、5 個の単語、6 個の単語、$\cdots$、13 個の単語で「一致」が生じることは、排反事象
    - 4 個の単語で「一致」が生じるということは、正確に言えば 4 個の単語「のみ」で「一致」が生じるということ
  - 確率の和の法則から足し算すると、0.2527 になる
    - 4 個の単語の「一致」確率 0.1535、5 個の確率 $= {}_{13}C_5 \times 0.2^5 \times 0.8^8$、$\cdots$、13 個の確率 $0.2^{13}$

# 参考文献


- マイクル O. フィンケルスタイン (2014)『法統計学入門：法律家のための確率統計の初歩』木鐸社の第 2 章 pp.68–69、第 3 章 pp.70–77.
- Finkelstein, M. O. & B. Levin (2001) *Statisticf for Lawyers* (2nd ed.), Springer の第 1 章、第 2 章、第 3 章.
- 河野敬雄 (2002)「大学入試制度における資格試験化と受験機会複数化の数理分析―ゲーム理論的視点からの試論―」理論と方法 17(2), 195-209.