法と統計学　第 2 回
確率の積の法則と和の法則 (1)

森　大輔

熊本大学法学部

2017 年

本日の流れ

例題 1：場合の数における積の法則

赤のサイコロと白のサイコロを同時に投げる。
このとき、赤のサイコロも白のサイコロも出た目が偶数になる場合の数を求めなさい。

ヒント：書き出しや樹形図がこの場合も有効

場合の数における積の法則

2 つの事象 A_1 と A_2 が独立だとする。
A_1 の起こる場合の数が $n(A_1)$ 通り、A_2 の起こる場合の数が $n(A_2)$ 通りあるとき、A_1 かつ A_2 の起こり方は次のようになる。$n(A_1 \text{かつ } A_2) = n(A_1) \times n(A_2)$ 通り

- 独立とは、A_1 の発生に A_2 が影響することがなく、A_2 の発生に A_1 が影響することがないこと
  - 例：コインを 2 枚 (コイン 1 とコイン 2 とする) 同時に投げ、コイン 1 が表になること (A_1) と、コイン 2 が表になること (A_2) とは独立
    - コイン 1 が表になったからといってコイン 2 が表になりにくくなることはない
- 「A_1 かつ A_2」は、A_1 と A_2 が両方起こること

例題 1：場合の数における積の法則

- 事象 A_1 と A_2 を下のように考えれば積の法則が使える
  - A_1 は、赤のサイコロの出た目が偶数
  - A_2 は、白のサイコロの出た目が偶数
  - A_1 と A_2 は独立
    - 赤のサイコロの目は白のサイコロの影響を受けないし、逆も同じ
- 書き出しを利用
  - A_1：赤のサイコロの出た目が偶数
    - 2, 4, 6 の 3 通り
  - A_2：白のサイコロの出た目が偶数
    - 2, 4, 6 の 3 通り
- A_1 が 3 通り A_2 が 3 通りより積の法則から $3 \times 3 = 9$ 通り

前回の練習問題 4 の (2)

あるサークルには男性 4 人（A, B, C, D)、女性 3 人（E, F, G）の全部で 7 人がいる。

(2) このサークルの男性から 2 人と女性から 1 人を選び、3 人のグループを作る。何通りの選び方があるか。
ヒント：組合せと積の法則の複合問題

前回の練習問題 4 の (2)

- 事象 A_1 と A_2 を下のように考えれば積の法則が使える
  - A_1 は、男性 4 人から 2 人を選ぶ
  - A_2 は、女性 3 人から 1 人を選ぶ
  - A_1 と A_2 は独立
- 組合せの計算を使用
  - A_1：男性 4 人から 2 人を選ぶ
    - ${}_4\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{P}_2 / {}_2\mathrm{P}_2 = 6$ 通り
  - A_2：女性 3 人から 1 人を選ぶ
    - ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通り
- A_1 が 6 通り A_2 が 3 通りより積の法則から $6 \times 3 = 18$ 通り

例題 2：場合の数における和の法則

歪みのないコインを 3 回投げる。
このとき表が 2 回以上出る場合の数を求めなさい。

ヒント：書き出しや樹形図がこの場合も有効

場合の数における和の法則

2 つの事象 A_1 と A_2 が排反事象だとする。
A_1 の起こる場合の数が $n(A_1)$ 通り、A_2 の起こる場合の数が $n(A_2)$ 通りあるとき、A_1 または A_2 の起こり方は次のようになる。$n(A_1 \text{または} A_2) = n(A_1) + n(A_2)$ 通り

- 事象とは「ものごと」ぐらいの意味に捉えておけばよい
- 排反事象とは、2 つ同時には起こらない事象（ものごと）
  - 例：コインを 1 回だけ投げ、表が出るという事象 (A_1) と、裏が出るという事象 (A_2) は、排反事象
    - 表が出たら、裏が出ることは起こらない
- 「A_1 または A_2」は、A_1 と A_2 のどちらか一方か、両方起こること
  - ただし今の場合、排反事象なので両方起こることはない

例題 2：場合の数における和の法則

- 表が 2 回以上出る場合は、表が 2 回出る場合と、表が 3 回出る場合がありうる
- 事象 A_1 と A_2 を下のように考えれば和の法則が使える
  - A_1 は、表が 2 回出る
  - A_2 は、表が 3 回出る
  - A_1 と A_2 は排反事象
    - 表が 2 回ちょうど出る場合には、3 回は出ない
- 書き出しを利用
  - A_1：表が 2 回出る
    - 表表裏、表裏表、裏表表の 3 通り
    - 表裏表は 1 回目に表が出て 2 回目に裏が出て 3 回目に表が出ること
  - A_2：表が 3 回出る
    - 表表表の 1 通り
- A_1 が 3 通り A_2 が 1 通りより和の法則から $3+1=4$ 通り

前回の練習問題 5 の (3)

アメリカの連邦最高裁判所では、9 人の裁判官がいる。
判決は、9 人の裁判官の多数決で決まる。
つまり、5 人以上の裁判官が、賛成票を投じると、判決がくだされる。
いま、判決が下された。
賛成票を投じた裁判官が誰であるかは、まだ確認していない。

(3) 賛成票を投じた裁判官の組合せは全部で何通りありうるか。

ヒント：組合せと和の法則の複合問題

前回の練習問題 5 の (3)

- 5 人以上の裁判官が賛成票を投じるということは、賛成票を投じるのが、5 人のとき、6 人のとき、7 人のとき、8 人のとき、9 人のときがある
  - これらは排反事象
- 5 人のとき
  - A、B、C、D、E、F、G、H、I の 9 人の裁判官のうち 5 人を選ぶ組合せを考えればよい
  - ${}_9C_5={}_9P_5/{}_5P_5=126$ 通り
- 同様に 6 人のとき 84 通り、7 人のとき 36 通り、8 人のとき 9 通り、9 人のとき 1 通り
- よって和の法則から $126+84+36+9+1=256$ 通り

例題 3：確率

次の確率を求めなさい。

(1) サイコロを 1 回投げて、3 の目が出る確率
(2) サイコロを 1 回投げて、奇数の目が出る確率

確率

- 事象 A の起こる確率は $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$
  - $n(U)$：起こりうる全ての場合の数
  - $n(A)$：事象 A の起こる場合の数
- 例題 3(1)
  - サイコロを 1 回投げると、起こりうる全ての場合は 1、2、3、4、5、6 の 6 通り
    - $n(U) = 6$
  - このときの事象 A は 3 の目が出ることで、これは 1 通り
    - $n(A) = 1$
  - よって確率は 1/6
- 例題 3(2)
  - $n(U) = 6$ で $n(A) = 3$
  - 確率は 3/6=1/2

例題 4：確率におけるモノの区別

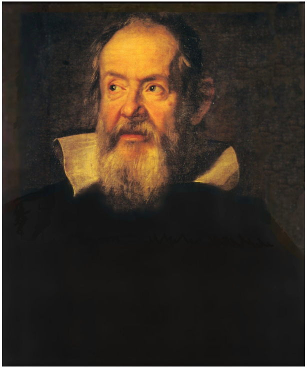
以下の確率を求めてください。

(1) 歪みのないコインが 2 枚ある。この 2 枚は、大きさや形などではまったく区別がつかないが、1 枚は赤、もう 1 枚は黒色をしている。この 2 枚を同時に投げて、2 枚とも表が出る確率は？
(2) 歪みのないコインが 2 枚ある。この 2 枚は、大きさや形など、まったく区別がつかないものである。この 2 枚を同時に投げて、2 枚とも表が出る確率は？
(3) 歪みのないコインが 1 枚ある。この 1 枚を 2 回に投げて、2 回とも表が出る確率は？

補足：確率におけるモノの区別

- 正解は (1)(2)(3) のどれも 1/4
  - (1) を考える
  - 2 枚のコインの出方は (表、表)(表、裏)(裏、表)(裏、裏) の 4 通り
    - (赤、黒) の順とする
  - あるいは積の法則から 2×2
- 確率の計算では基本的に区別をつけて計算する
  - (2) から (1)(色を塗っただけ) で確率が変わることはない
- (2) の誤った考え方
  - 区別がつかないので (表、裏)(表、表)(裏、裏) の 3 通り
  - よって 2 枚とも表の確率は 1/3
- なぜ誤りか?
  - (表、裏) と (表、表)(裏、裏) の出やすさが等しくない
    - (表、裏) は、(表、表)(裏、裏) の 2 倍出やすくなっている
    - 実際にコイン投げを何度もしてみるとわかる

練習問題 1：ガリレオへの相談



- 確率は、古くはギャンブルに関する考察から発達してきた
- ガリレオ・ガリレイは、ギャンブル好きな貴族から次のような相談をされた
  - 3 個のさいころを同時に振るとき、その目の和が 9 のときと 10 のときを比べる
  - どちらも場合の数は 6 通りで同じはずなのに、実際には 10 の方が少し出やすい気がする
  - なぜか説明してほしい

練習問題 1：ガリレオへの相談

- 目の和が 9 のとき
  - (1,2,6)(1,3,5)(1,4,4)(2,2,5)(2,3,4)(3,3,3) の 6 通り
- 目の和が 10 のとき
  - (1,3,6)(1,4,5)(2,2,6)(2,3,5)(2,4,4)(3,3,4) の 6 通り
- 同じ 6 通りに見えるが……

確率の積の法則

確率の積の法則

A_1 と A_2 が独立ならば、$\mathrm{P}(A_1 \text{かつ } A_2) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2)$

- 例：コインを 2 枚同時に投げ、コイン 1 が表になりかつコイン 2 が表になる確率は、$1/2 \times 1/2 = 1/4$
- 場合の数の積の法則と似ているが、実際、場合の数の積の法則を使って導かれている
  - $\mathrm{P}(A_1 \text{かつ } A_2) = \frac{n(A_1 \text{かつ } A_2)}{n(U)} = \frac{n(A_1) \times n(A_2)}{n(U)} = \frac{n(A_1)}{n(U)} \times \frac{n(A_2)}{n(U)} = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2)$

ハウランド遺言事件

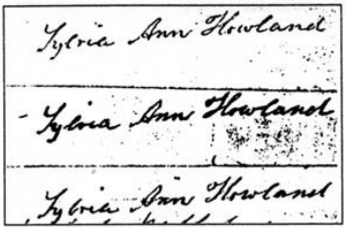
https://en.wikipedia.org/wiki/Hetty_Green より

- ヘティ・グリーン（ヘティ・H・ロビンソン）(1834–1916)
  - 投資や投機により莫大な財産を築く
  - 当時、世界で最も資産を持つ女性
    - 「ウォール街の魔女」と呼ばれる
  - ギネスブックに公認されるほどの「世界一のケチ」
- ハウランド遺言事件
  - ヘティ・グリーンのおばであるシルヴィア・アン・ハウランドの遺言を巡る事件

ハウランド遺言事件

- シルヴィアが 1865 年に亡くなる
- 遺産の一部のみを姪のヘティに遺贈する遺言状を残す
    - 遺産は当時 200 万ドルと評価された (かなり巨額)
- ヘティはこの遺言状に異議を唱える
    - この遺言状以前に、遺産全てを相続する旨の取り決めをおばと結んでいたと主張
    - 証拠としてヘティは古い版の遺言状を提出
        - 全ての遺産をヘティに譲る
        - さらに、この遺言状の後に作られた遺言状は全て無効とみなす、と 2 頁目に書かれていた
        - この頁の写しもあった
- 遺産管理人は、2 頁目や写しは偽造だとして、ヘティの要求を拒絶
- ヘティは、裁判所に訴えて認めてもらおうとした

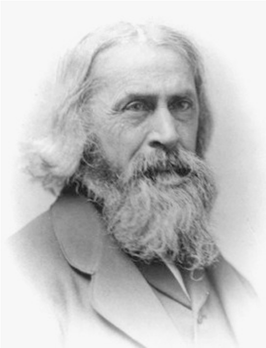
ハウランド遺言事件



https://sinews.siam.org/DetailsPage/tabid/607/ArticleID/341/Quantitative-Evidence-Often-a-Tough-Sell-in-Court.aspx より

- 左の写真が、問題になったシルヴィアのサイン
  - 一番上が遺言状 1 頁目のシルヴィアのサイン
  - 真ん中と下が、遺言状 2 頁目と写しのシルヴィアのサイン
- この事件での、筆跡に関する問題の争われ方は特殊
  - 普通の事件では、筆跡が似ていないなら偽造
  - この事件は、筆跡が似すぎていることが問題 (なぞり書きによる偽造の疑い)

ハウランド遺言事件



https://en.wikipedia.org/wiki/Benjamin_Peirce より

- この事件で、証人として数学者が登場
  - ベンジャミン・パース (1809–1880)
    - ハーバード大学の著名な数学者
    - 天体力学の分野では、後の冥王星の発見につながる計算を行ったうちの一人
  - 2 頁目のサインと写しのサインが両方とも本物であると仮定
  - そのとき、それらのサイン同士が非常に似通ったものになる確率を計算しようとした

練習問題 2：ハウランド遺言事件

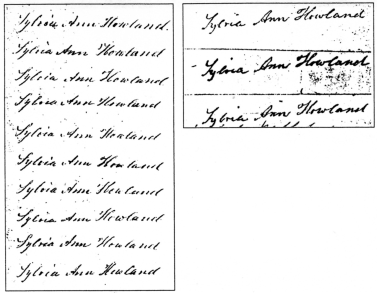
数学者パースはまず、シルヴィアのサインには、上から下への筆の運びが 30 個あることを確認した。そして、1 頁目の本物のサインと、2 頁目のサインを比較したところ、30 個全てがぴったり一致した。今度は、他の様々な文書に書かれた、シルヴィアの本物のサイン 42 個を用意した。そして、これら 42 個のサインを、2 個ずつペアにして、上から下への筆の運びが何個一致するかを数えた。それを可能なすべての 2 個ペアについて行ったところ、合計で 5325 個が一致していた。

(1) 42 個のサインから 2 個ペアは何通り作れるだろうか。
(2) シルヴィアがサインを 2 個書いた場合、上から下への筆の運び一組が一致する確率はどれくらいだろうか。
(3) シルヴィアがサインを 2 個書いた場合、上から下への筆の運びすべてが一致する確率はどれくらいだろうか。

ハウランド遺言事件

- パースのとった方法
  - シルヴィアのサインには、上から下への筆の運びが 30 個ある
  - そして、1 頁目の真正なサインと、2 頁目のサインを比較した
  - すると、上から下への筆の運び 30 個全てがぴったり一致してしまった
    - 普通は、同一人物が書いても、筆の運びが全てぴったり一致するなどということはめったに起こらないはず
    - 何個か外れるのが普通だから
    - 全てがぴったり一致したとしたら、偶然一致したと考えるよりなぞり書きしたからと考える方が説得力があるのでは？
  - それでは、なぞり書きせずに、このように 30 個全てが一致する確率は具体的にいくつか？

ハウランド遺言事件



https://sinews.siam.org/DetailsPage/tabid/607/ArticleID/341/Quantitative-Evidence-Often-a-Tough-Sell-in-Court.aspx より

- 他の様々な文書に書かれたシルヴィアのサイン 42 個を用意
  - これら 42 個は、真正なサインであることに争いはない
  - 写真の左側は、そうした 42 個のサインの中の 10 個
- これら 42 個のサインから 2 個選んでペアを作る
  - ペアは全部で 861 通り作れる
    - 42 個から 2 個選ぶ組み合わせの数は ${}_{42}C_2 = 861$

ハウランド遺言事件

- 861 通りのペアそれぞれで、上から下への筆の運び 30 個を比較する
  - 全部で $861 \times 30 = 25380$ 個の比較を行うことになる
- 比較したところ、25380 個のうち 5325 個が一致
  - だいたい $1/5$ くらい
- つまり、シルヴィアが普通に書いた場合、上から下への筆の運びが一致する確率は約 $1/5$
- 30 個一致する確率は？
  - 確率の積の法則から $(1/5)^{30}$
  - これを計算すると、931×10^{18} 分の 1
- つまり、シルヴィアが普通に書いたと仮定すると、30 個ともぴったり一致することは 931×10^{18} 回に 1 回しか起こらない
  - 天文学的な数字 (異常に小さい)

ハウランド遺言事件

- 普通に書いてこのように稀なことが偶然に起こったと考えるよりも、なぞり書きをした結果 30 個全てが一致したとする方が説得力がある
  - 普通に書いたと仮定 → その仮定の下での確率を計算 → 確率が異常に小さい場合に仮定を棄て去る
    - このような論理を仮説検定と呼ぶ (第 12 回目ぐらいの授業で詳細)
  - パースの言葉「このくらい極めて起こりにくいことは、実際上不可能なことと同じである。」
  - 因みに、パースは計算間違いして 2666×10^{18} 回に 1 回と述べた
- 結局、2 頁目や写しのサインは本物とは認められず
  - 1870 年に判決
  - ヘティは遺産の相続に失敗したが、その後も投資などで成功し、世界で最も資産を持つ女性に

ハウランド遺言事件

- パースの議論に問題がないか？
- 独立性の問題
  - 確率の積の法則が使えるのは事象が独立の場合
  - 今回の上から下への筆の運び 30 個の一致も、独立だと仮定されている
    - しかし、これは疑わしい
    - 同時期に書かれたサインは、違う時期に書かれたサインよりも一致しやすいと考えられる
    - よって、あるペアで 1 個一致が見つかる場合、そのペアではもっとたくさん一致が見つかる可能性が高い
    - つまり独立とは言えない

適用例 1：タイプライターのキズ

https://en.wikipedia.org/wiki/Typewriter より

- People v. Risley (1915)
  - ニューヨーク州裁判所の刑事事件
  - ある弁護士が逮捕、起訴
    - 裁判所の記録から文書を抜き取った
    - そして、自分の事件で自分に有利になるような文言をタイプライターで挿入して戻したという疑い
    - タイプライターとは、キーボードを打つことにより活字を紙に打ち付けて文書を作る器具、Microsoft Word の先祖

適用例 1：タイプライターのキズ

- 挿入が疑われている文言のタイプ文字には 11 個のキズ
  - このキズと弁護士の所有するタイプライターの印字のキズとがよく似ていた
- 検察は数学の大学教授を証人に立てた
- 普通のタイプライターだと仮定したとき、偶然にこれらの 11 個のキズと同様のキズの印字がされる確率を証言
- 教授は、キズが生じる確率の値を 1 つ 1 つ仮定
  - その具体的な値は記録に残っていない
- それらの値を掛け算して、1/40 億という数値を出した
  - 確率は異常に小さく偶然生じた可能性はほぼ皆無、弁護士のタイプライターだからこそ生じたと結論
    - ハウランド遺言事件と同じ仮説検定の論理
- しかし、この計算には問題点
  - タイプライターの印字のキズは独立でない
    - キズの発生は、タイプライターの機械の経年数と関係

適用例 2：乳幼児突然死症候群

- 1999 年、イギリス
- サリー・クラークという女性が、自分の赤ん坊のクリストファーとハリーを殺害したかどで有罪
  - 2 人とも死亡時見かけ上健康な乳児で、死亡原因は不明
  - 1 人目の乳児の死亡後の診断で、乳幼児突然死症候群 (SIDS) とされた
  - 2 人目の乳児も死亡して、これはおかしいということになり、母親が虐待して殺したのではないかと疑われて逮捕、起訴
- 裁判で、著名な小児科医で教授であるロイ・メドウ卿が証言
  - 1993 年から 96 年の間の、イギリスの 5 つの地域での乳児の死亡に関する研究について証言
    - 政府から大規模な資金援助を受けた、最新の研究だった

適用例 2：乳幼児突然死症候群

- ロイ・メドウ卿の証言
- SIDS での死亡の確率は、この研究によれば 1/1303
- ただし、勤労者がいて喫煙しない家庭で、かつ母親が 26 歳以上であるかまたは乳児が一人っ子の場合は、死亡の確率は 1/8543
  - クラーク家はこの特徴をもっていた
- こうした特徴をもつある一つの家庭で、SIDS による死亡が 2 人生じる確率は？
  - この研究によれば $\frac{1}{8543} \times \frac{1}{8543} = \frac{1}{7300\text{ 万}}$
  - 証言のこの部分はメディアで大きく報道された
  - イギリスでは 1 年に 70 万の出産がある
  - よって、普通の家庭だと仮定すると、偶然に SIDS の死亡が 2 人生じることは、100 年に 1 度くらいしか起こらない
    - ハウランド遺言事件と同様の仮説検定の論理

適用例 2：乳幼児突然死症候群

- メドウ卿は、この研究の報告書についていた以下の注意書きについて言及しなかった
  - 1/7300 万という数字は、遺伝的要因の発生の可能性を考慮したものではない
  - SIDS の死亡が 2 人生じた例で、虐待が常に原因であると仮定することは不適切
- 裁判で被告人側の証人であるベリー教授も同じ指摘
  - 確率を単に 2 乗するのは単純化しすぎ
  - 共通の遺伝的要因により 2 人の死が引き起こされた可能性を考慮していない
    - つまり、2 人の死は独立でないということ
- 裁判官は、統計数字を信頼しすぎないよう陪審員に注意
- しかし、陪審はサリー・クラークを有罪と判断した

適用例 2：乳幼児突然死症候群

- 1 度目の上訴では、裁判所は 1/7300 万という数字に対する異議を却下
  - 2 乗する計算に反対する議論を陪審は知っていた
  - 裁判官も注意していた
- 2 度目の上訴では、有罪判決を破棄
  - 裁判所はメドウ卿の証言を、明白に誤りでひどくミスリーディングだとする
  - 1/7300 万よりも頻繁に生じるという証拠がある
    - SIDS の乳児が出た 323 家庭のうち、5 家庭で以前にも SIDS の乳児が出た
    - 上と同時期に生まれ SIDS とならなかった乳児がいる 1288 家庭のうち、2 家庭で以前に SIDS の乳児が出た
- サリー・クラークの父親は、メドウ卿をイギリス医事委員会に告発
  - 委員会は、メドウ卿の医師登録を取消 (後に回復)

参考文献

- マイクル O. フィンケルスタイン (2014)『法統計学入門：法律家のための確率統計の初歩』木鐸社の第 2 章 pp.68–69、第 3 章 pp.70–77.
- Finkelstein, M. O. & B. Levin (2001) *Statisticf for Lawyers* (2nd ed.), Springer の第 1 章、第 2 章、第 3 章.